

DOI 10.25689/NP.2018.1.1-11

УДК 622.276.031:532.5.001

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОЛЯ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛАСТА С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ АППРОКСИМАЦИИ
В ЗАДАЧЕ ОДНОФАЗНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ
ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ**

Елесин А.В., Кадырова А.Ш., Никифоров А.И.

ИММ - обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН

**IDENTIFICATION OF FORMATION PERMEABILITY FIELD USING
DIFFERENT APPROXIMATION TYPES IN SINGLE-PHASE STEADY-
STATE FLOW PROBLEM**

Elesin A.V., Kadyirova A.Sh., Nikiforov A.I.

IME - Subdivision of FIC KazanSC of RAS

E-mail: elesin@imm.knc.ru

Аннотация. Проводится сравнение различных типов параметризации поля проницаемости при его идентификации. Для аппроксимации поля проницаемости используются сплайн-функция, кусочно-постоянная и кусочно-билинейная функции. Задача идентификации поля проницаемости сводится к минимизации функции невязки. На модельных задачах показано преимущество использования сплайн-функции по сравнению с другими типами аппроксимации.

Ключевые слова: идентификация проницаемости; обратная коэффициентная задача; аппроксимация поля проницаемости; минимизация функции невязки; метод Левенберга-Марквардта.

Abstract. A comparison of different types of the permeability field parameterization at its identification is performed. The spline function,

piecewise constant and piecewise bilinear functions are used to approximate the permeability field. The identification task of the permeability field is reduced to minimization of the residual function. The advantage of using the spline function in comparison with other types of approximation is shown on the model tasks.

Key words: *permeability identification; inverse problem; approximation of permeability; minimization of residual function; method of Levenberg-Marquardt.*

Введение.

При решении задач фильтрации необходимо знание полей пористости, проницаемости и насыщенности. Обычно значения этих параметров известны только на скважинах и необходимо каким-либо способом получить эти значения во внескважинном пространстве. Поле проницаемости, как правило, определяется из решения обратной коэффициентной задачи в каком-либо классе функций. В данной работе поле проницаемости ищется в классах кусочно-постоянных, кусочно-билинейных функций и сплайн-функций. Для сравнения различных типов параметризации поля проницаемости используется синтетический тест. По заданному полю проницаемости определяются забойные давления на скважинах. Далее это поле считается неизвестным и определяется в процессе минимизации функции невязки, построенной по известным забойным давлениям.

Постановка задачи.

Дифференциальное уравнение для определения поля давления в условиях однофазной стационарной фильтрации жидкости, подчиняющейся закону Дарси, в двухмерном пласте Ω имеет вид [1,2]

$$\nabla \left(\frac{kh}{\mu} \nabla p \right) = \sum_{i=1}^M Q_i \delta(x_i, y_i), \quad (1)$$

где $k = k(x, y)$ - проницаемость, $h = h(x, y)$ - толщина пласта, μ - вязкость жидкости, p - давление, $Q_i, (x_i, y_i)$ - дебит и координаты i -ой скважины, $\delta(x_i, y_i)$ - дельта-функция, M – число скважин. Для уравнения (1) задаются граничные условия

$$p|_{\Gamma} = p_{\Gamma}, \quad (2)$$

где Γ - граница пласта Ω .

Для решения системы уравнений (1)-(2) должны быть известны параметры пласта, в том числе его проницаемость. Задача определения проницаемости пласта относится к классу обратных коэффициентных задач [3]. В данной работе проницаемость определяется по известным замерам давления на скважинах в процессе минимизации функции невязки, имеющий вид

$$J(k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (p_i - p_i^*)^2, \quad (3)$$

где p_i, p_i^* - значения давления, полученные в результате решения уравнения (1), и известные замеры на скважинах.

Параметризация поля проницаемости.

Для аппроксимации поля проницаемости используются различные классы функций. В данной работе это поле отыскивается в классе кусочно-постоянных функций, сплайн-функций и кусочно-билинейных функций [3-5].

Кусочно-постоянная аппроксимация.

Пласт разбивается на зоны однородности. Каждая зона однородности Ω_i характеризуется одним значением проницаемости k_i , постоянным в пределах зоны однородности. Таким образом, проницаемость пласта представляется кусочно-постоянной функцией

$$k = k(x, y) = \sum_{i=1}^N k_i \varphi_i(x, y),$$

где $\varphi_i(x, y) = 1$ при $(x, y) \in \Omega_i$ и $\varphi_i(x, y) = 0$ при $(x, y) \notin \Omega_i$, $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$, N - число зон однородности.

Аппроксимация сплайн-функцией.

По значениям проницаемости k_i в заданных точках $P_i(x_i, y_i)$ строится сплайн-функция

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^N c_i r_i^2 \ln r_i^2 + c_{N+1} + c_{N+2}x + c_{N+3}y,$$

где $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$. Для определения коэффициентов c_i , $i = 1, N + 3$, сплайн-функции $k(x, y)$ необходимо решить систему уравнений

$$k(x_i, y_i) = k_i, \quad i = 1, N,$$

$$\sum_{i=1}^N c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N x_i c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N y_i c_i = 0.$$

Для существования единственного решения этой системы требуется выполнение двух условий: 1) число точек P_i должно быть больше трёх ($N > 3$); 2) среди точек P_i должны быть хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой.

Билинейная аппроксимация.

Пласт Ω покрывается прямоугольной сеткой. Вершины прямоугольников образуют узлы конечноэлементной сетки. Проницаемость k представляется в виде

$$k \approx \tilde{k} = \sum_{i=1}^N k_i \Phi_i(x, y),$$

где k_i - значение проницаемости в i -м узле сетки, Φ_i - билинейная базисная функция, N - число узлов конечноэлементной сетки. Функция Φ_i

равна нулю всюду в области Ω за исключением подобласти, составленной из прямоугольников сетки, одна из вершин которых совпадает с узлом i . Для прямоугольника с узлами i, j, l, m базисные функции имеют вид

$$\Phi_i = \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \left(\frac{y - y_m}{y_i - y_m} \right), \quad \Phi_j = \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \left(\frac{y - y_l}{y_j - y_l} \right),$$

$$\Phi_l = \left(\frac{x - x_m}{x_l - x_m} \right) \left(\frac{y - y_j}{y_l - y_j} \right), \quad \Phi_m = \left(\frac{x - x_l}{x_m - x_l} \right) \left(\frac{y - y_i}{y_m - y_i} \right),$$

где $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_l, y_l), (x_m, y_m)$ - координаты узлов i, j, l, m .

Минимизация функции невязки.

Минимизация функции невязки (3) проводится методом Левенберга-Марквардта [6,7]. На каждой итерации метода новые значения идентифицируемых параметров вычисляются по формуле

$$\mathbf{K}^n = \mathbf{K}^{n-1} - (\mathbf{H} + \mu_n \mathbf{E})^{-1} \mathbf{g},$$

где $\mathbf{K} = \{\ln k_i\}_{i=1}^N$, \mathbf{E} - единичная матрица, $\mathbf{H} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ - приближённая матрица вторых производных, \mathbf{A} - матрица чувствительности, \mathbf{g} - градиент функции невязки, μ_n - параметр Марквардта, n - номер итерации. Начальное значение параметра Марквардта выбирается на порядок больше максимального сингулярного числа матрицы \mathbf{H} . В случае уменьшения функции невязки на текущей итерации $J(\mathbf{K}^n) < J(\mathbf{K}^{n-1})$ параметр Марквардта уменьшается в два раза, в случае нарушения условия убывания параметр Марквардта увеличивается в два раза до тех пор, пока это условие не выполнится. Затем осуществляется переход на новую итерацию. Элементы матрицы чувствительности вычисляются численно.

Остановка процесса минимизации функции невязки осуществляется по выполнению одного из двух критериев: достижение заданной точности

по замерам давления $\max_{i=1,M} |p_i - p_i^*| < 0,01 \text{ МПа}$ или медленная сходимость процесса минимизации $J^n - J^{n+1} < 0,01 J^n$ в течение 3 итераций.

Численные примеры.

В данной работе для сравнения различных способов интерполяции поля проницаемости в процессе идентификации используются модельные задачи. Модельные задачи строятся следующим образом. Для заданного поля проницаемости k^{tr} из решения уравнения (1) определяются значения давления на скважинах. Далее поле проницаемости считается неизвестным и определяется по известным значениям давления на скважинах в процессе минимизации функции невязки (3).

Уравнение фильтрации (1) решается численно. Для аппроксимации по пространственным переменным пласт Ω покрывается квадратной сеткой, и используется метод контрольных объёмов. Полученная система линейных алгебраических уравнений решается методом сопряженных градиентов с предобуславливанием в виде неполного разложения Холесского [8,9]. Для вычисления давления на скважинах применяется формула Писмана [10].

Модельная задача 1.

Пласт Ω (5000 м × 5000 м, мощность 10 м) вскрыт 20 нагнетательными и 80 добывающими скважинами. На нагнетательных скважинах дебит меняется от 100 м³/сут. до 150 м³/сут., на добывающих - от 20 м³/сут. до 95 м³/сут. Радиус скважин 0,1 м. На границе пласта Ω задано давление 20 МПа. Вязкость жидкости 10 мПа·с. В качестве контрольного объёма используется квадрат со стороной 50 м.

Истинное поле проницаемости пласта k^{tr} построено методом kriging по заданным значениям в 25 узлах равномерной квадратной сетки (рис. 1). Поля проницаемости пласта, вычисленные в процессе минимизации

функции невязки с применением различных типов аппроксимации, показаны на рис. 2-4. При использовании интерполяции сплайн-функцией координаты узлов интерполяции совпадали с координатами скважин ($N=100$). В случае интерполяции кусочно-постоянной функцией прямоугольные зоны однородности строились вокруг скважин ($N=100$). Для представления поля проницаемости кусочно-билинейной функцией пласт покрывался квадратной сеткой 8×8 ($N=81$). Среднеквадратическое отклонение $\Delta K^{av} = \sqrt{\sum_{i=1}^L (k_i^{tr} - k_i)^2} / L$ и максимальное отклонение $\Delta K^{max} = \max_{i=1,L} |k_i^{tr} - k_i|$ истинных значений проницаемости от вычисленных по всем контрольным объёмам сетки ($L=10000$) и на скважинах ($L=100$) приведены в табл. 1.

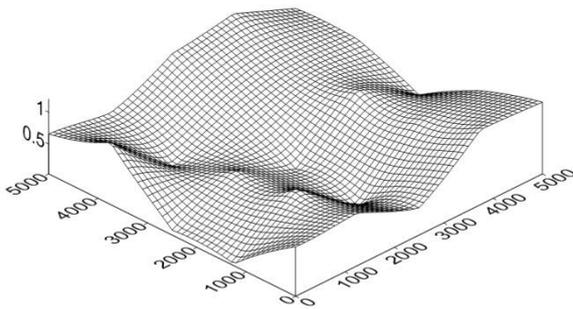


Рис. 1. Истинное поле проницаемости модельной задачи 1.

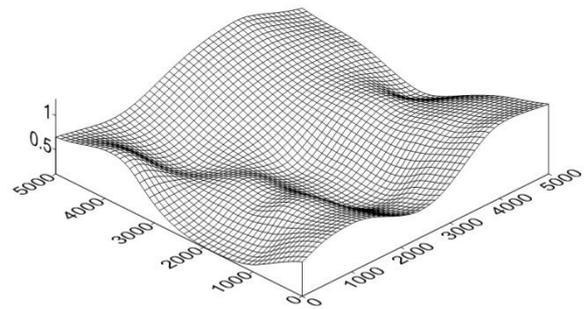


Рис. 2. Вычисленное поле проницаемости в виде сплайн-функции в модельной задаче 1.

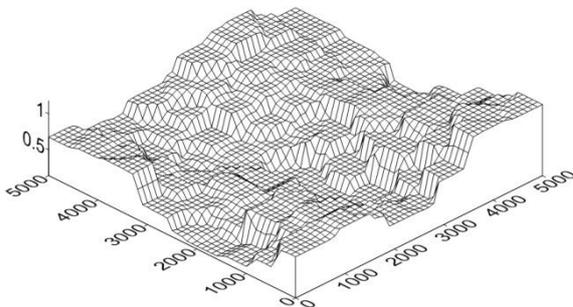


Рис. 3. Вычисленное поле проницаемости в виде кусочно-постоянной функции в модельной задаче 1.

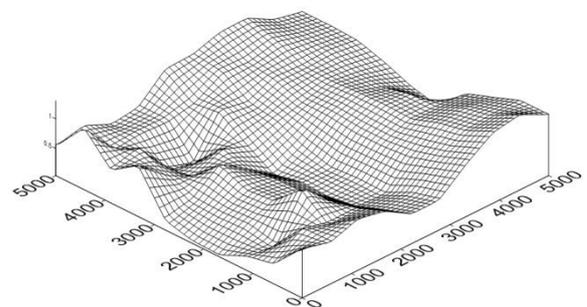


Рис. 4. Вычисленное поле проницаемости в виде кусочно-билинейной функции в модельной задаче 1.

Таблица 1

Модельная задача 1. Среднеквадратическое отклонение и максимальное отклонение истинных значений проницаемости от вычисленных.

Тип аппроксимации	Все блоки сетки		По скважинам	
	ΔK^{av}	ΔK^{max}	ΔK^{av}	ΔK^{max}
Сплайн-функция	0,019	0,162	0,011	0,059
Кусочно-постоянная функция	0,067	0,312	0,018	0,082
Кусочно-билинейная функция	0,047	0,371	0,010	0,042

При использовании интерполяции сплайн-функцией и кусочно-постоянной функцией была достигнута заданная точность давления на скважинах 0,01 МПа. А при использовании кусочно-билинейной функции процесс минимизации был прерван по критерию медленной сходимости, при этом максимальная невязка по давлению на скважинах равна 0,046 МПа.

Модельная задача 2.

Отличие этой задачи от модельной задачи 1 состоит в том, что истинное поле проницаемости пласта (рис. 5) построено по заданным значениям в 49 узлах квадратной сетки. Все остальные данные совпадают.

Поля проницаемости пласта, вычисленные в процессе минимизации функции невязки с применением различных типов аппроксимации, показаны на рис. 6-8. Среднеквадратическое отклонение ΔK^{av} и максимальное отклонение ΔK^{max} истинных значений проницаемости от вычисленных по всем контрольным объемам сетки и на скважинах приведены в табл. 2.

Во второй модельной задаче при использовании различных типов аппроксимации получены результаты аналогичные результатам первой модельной задачи.

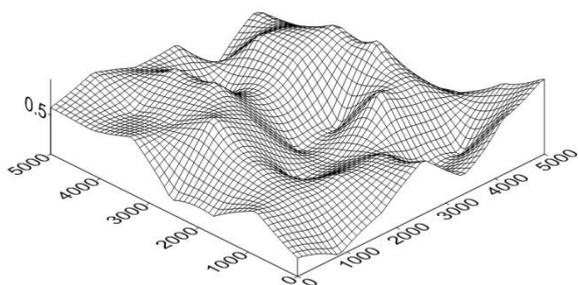


Рис. 5. Истинное поле проницаемости модельной задачи 2

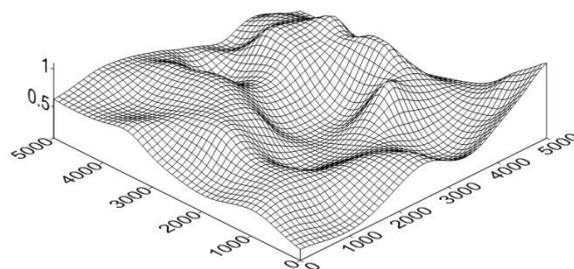


Рис. 6. Вычисленное поле проницаемости в виде сплайн-функции в модельной задаче 2

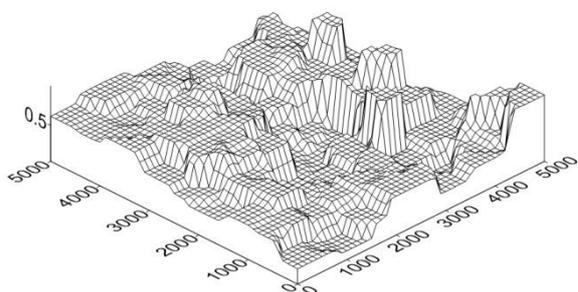


Рис. 7. Вычисленное поле проницаемости в виде кусочно-постоянной функции в модельной задаче 2

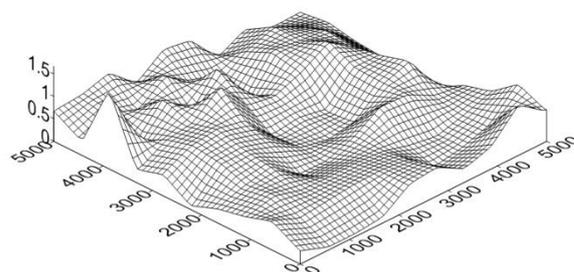


Рис. 8. Вычисленное поле проницаемости в виде кусочно-билинейной функции в модельной задаче 2

Таблица 2

Модельная задача 2. Среднеквадратическое отклонение и максимальное отклонение истинных значений проницаемости от вычисленных.

Тип аппроксимации	Все блоки сетки		По скважинам	
	ΔK^{av}	ΔK^{max}	ΔK^{av}	ΔK^{max}
Сплайн-функция	0,132	0,523	0,144	0,466
Кусочно-постоянная функция	0,179	0,723	0,160	0,600
Кусочно-билинейная функция	0,163	1,084	0,145	0,419

Заключение.

Решены модельные задачи идентификации поля проницаемости двухмерного пласта по известным значениям давления на скважинах в условиях стационарной однофазной фильтрации жидкости. Для параметризации поля проницаемости использованы три типа

аппроксимации: сплайн-функция, кусочно-постоянная и кусочно-билинейная функции. Поле проницаемости определялось в процессе минимизации функции невязки. Использование сплайн-функции для идентификации поля проницаемости позволило получить решение наиболее близкое к истинному.

Список литературы

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. - М.: Недра, 1982. - 407 с.
2. Басниев К.С., Власов А.М., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидравлика: Учебник для вузов. - М.: Недра, 1986. - 303 с.
3. Sun N.-Z. Inverse Problems in Groundwater Modeling. - Kluwer Acad., Norwell, Mass., 1994. - 337 p.
4. Ашкеназы В.О. Сплайн-поверхности: Основы теории и вычислительные алгоритмы: Учебное пособие. – Тверь: Тверской гос. ун-т, 2003. - 82 с.
5. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
6. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. - М.: Мир, 1988. – 440 с.
7. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие. – 2-е изд., - М.: Высш.шк., 2005. – 544 с.
8. Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. Матричные вычисления. - М.: Мир, 1999. – 548 с.
9. Larabi A., De Smedt F. Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods // Water Resour. Res. – 1994. Vol. 30, № 2. – P.509-521.
10. Peaceman D.W., Interpretation of well block pressures in numerical reservoir simulation, Soc. Petrol. Eng. Journal, V. 18, N. 3, P. 183–194, 1978.

Сведения об авторах

Елесин Андрей Викторович, кандидат физико-математических наук, и.о. с.н.с., заведующий, лаборатория математического моделирования гидрогеологических процессов, Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г.Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация
E-mail: elesin@imm.knc.ru

Кадьрова Альфия Шамилевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, лаборатория математического моделирования гидрогеологических процессов, Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г.Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация
E-mail: kadyrova_ash@imm.knc.ru

Никифоров Анатолий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, и.о. г.н.с., заведующий, лаборатория математического моделирования процессов фильтрации, Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г.Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация
E-mail: nikiforov@imm.knc.ru

Authors

Elesin A.V., PhD, Head of Groundwater Math Simulation Laboratory, Institute of Mechanics and Machinery, Kazan Research Center of the RAS, Kazan, Republic of Tatarstan, Russian Federation
E-mail: elesin@imm.knc.ru

Kadyrova A.Sh., PhD, Senior researcher, Groundwater Math Simulation Laboratory, Institute of Mechanics and Machinery, Kazan Research Center of the RAS, Kazan, Republic of Tatarstan, Russian Federation
E-mail: kadyrova_ash@imm.knc.ru

Nikiforov A.I., Dr.Sc, Professor, Head of Fluid Flow Math Simulation Laboratory, Institute of Mechanics and Machinery, Kazan Research Center of the RAS, Kazan, Republic of Tatarstan, Russian Federation
E-mail: nikiforov@imm.knc.ru

Елесин Андрей Викторович
420111, Российская Федерация, Республика Татарстан,
г. Казань, ул. Лобачевского, 2/31
тел.: +7(843)2927490
E-mail: elesin@imm.knc.ru