УДК 519.6

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА АБСОЛЮТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛАСТА ПО ЗАМЕРАМ ДЕБИТА НА ОДИНОЧНОЙ СКВАЖИНЕ В УСЛОВИЯХ ТРЁХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

А.В. Елесин, А.Ш. Кадырова, А.И. Никифоров

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН

THE IDENTIFICATION OF ABSOLUTE PERMEABILITY ON THE DEBIT MEASUREMENTS OF SINGLE WELL UNDER THREE-PHASE FILTRATION IN HETEROGENEITY RESERVOIR

A.V. Elesin, A.Sh. Kadyirova, A.I. Nikiforov

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center Russian Academy of Sciences

E-mail: elesin@imm.knc.ru

Аннотация. Рассматривается задача идентификации коэффициента абсолютной проницаемости пласта в условиях трёхфазной фильтрации по значениям дебита, известным на различные моменты времени на одиночной скважине. Задача идентификации сводится к задаче минимизации функции невязки. Для минимизации функции невязки используется квазиньютоновский метод Левенберга-Марквардта.

Ключевые слова: *трёхфазная фильтрация; модель нелетучей нефти; идентификация абсолютной проницаемости; минимизация функции невязки; метод Левенберга-Марквардта.*

Abstract. The identification problem of absolute permeability coefficients for three-phase flow is considered. It is believed that on the well known values of flow rate in some moments of time. The identification task is reduced to minimization of the residual function. The minimization procedure is carried out the Levenberg-Marquardt method.

Key words: *three-phase filtration; black oil model; identification of absolute permeability; minimization of residual function; method of Levenberg-Marquardt.*

Введение.

Для решения задач трёхфазной фильтрации необходимо знание параметров пласта, в том числе должно быть известно поле коэффициента абсолютной проницаемости. При решении практических задач коэффициент абсолютной проницаемости пласта обычно определяется по результатам исследований кернов. Результаты этих исследований носят локальный характер и не могут характеризовать весь пласт. В данной работе значения коэффициента абсолютной проницаемости определяются (идентифицируются) из решения обратной коэффициентной задачи для системы уравнений трёхфазной фильтрации.

Определение коэффициента абсолютной проницаемости проводится для трёхмерного слоисто-неоднородного пласта по значениям дебита на несовершенной вертикальной скважине. Задача сводится к задаче минимизации функции невязки, имеющей вид суммы квадратов разностей между известными значениями дебита (результаты замеров дебита на скважине) и значениями дебита, полученными из решения системы уравнений трёхфазной фильтрации. Минимизация функции невязки проводится квазиньютоновским методом Левенберга-Марквардта. Исследуется устойчивость решения к погрешностям в замерах дебита.

Постановка и метод решения задачи трёхфазной фильтрации.

В трёхмерном пласте предполагается трёхфазная фильтрация нефти (o), воды (w) и газа (g). Рассматривается модель нелетучей нефти: вода и нефть не смешиваются и не обмениваются массами, газ растворим в нефти и не растворим в воде. В этом случае процесс изотермической фильтрации в трёхмерном пласте Ω без учета капиллярных и гравитационных сил описывается системой уравнений [1,2]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{mS_w}{B_w}\right)=\nabla\cdot\left(T_w\nabla p\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{mS_o}{B_o}\right)=\nabla\cdot\left(T_o\nabla p\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m\left(\frac{S_g}{B_g}+\frac{R_sS_o}{B_o}\right)\right)=\nabla\cdot\left(T_g\nabla p\ +R_sT_o\nabla p\right), \tag{3}$$

$$S_w+S_o+S_g=1, \tag{4}$$

где t – время, m – пористость, S_α – насыщенность фазы α, $\alpha = o, w, g$, B_α – объемные коэффициенты, T_α – проводимости, p – давление, R_s – коэффициент растворимости газа в нефти. Проводимости T_α вычисляются по формулам

$$T_\alpha=\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha B_\alpha}k,$$

где $k_{r\alpha}$ – функции относительных фазовых проницаемостей, k – коэффициент абсолютной проницаемости, B_α – объемные коэффициенты, μ_α – вязкость.

Функции относительных фазовых проницаемостей определяются при следующих предположениях: k_{rw} зависит только от водонасыщенности S_w, k_{rg} зависит только от газонасыщенности S_g и k_{ro} зависит от S_w и S_g [1]. Используется вторая модель Стоуна [1,2], в которой по эмпирическим формулам определяют относительные проницаемости фаз $\tilde{k}_{row}$, $\tilde{k}_{rw}$ и $\tilde{k}_{rog}$, $\tilde{k}_{rg}$ в двухфазных системах нефть-вода и нефть-газ [2]:

$$\tilde{k}_{rw}(S_w)=A\left(\frac{S_w-S_{wc}}{S_{w\max}-S_{wc}}\right)^{nw},\quad \tilde{k}_{row}(S_w)=\left(\frac{S_{w\max}-S_w}{S_{w\max}-S_{wc}}\right)^{now}, \tag{5}$$

$$\tilde{k}_{rg}(S_g)=\left(\frac{S_g-S_{gr}}{S_{g\max}-S_{gr}}\right)^{ng},\quad \tilde{k}_{rog}(S_g)=\left(\frac{S_{g\max}-S_g}{S_{g\max}}\right)^{nog}, \tag{6}$$

где $S_{wc}, S_{w\max}$ - связанная и предельная водонасыщенность в системе нефть-вода, $S_{g\max} = S_{w\max} - S_{wc}$, S_{gr} - остаточная газонасыщенность в системе нефть-газ. Для трехфазной системы принимаются $k_{rw} = \tilde{k}_{rw}$, $k_{rg} = \tilde{k}_{rg}$ и k_{ro} определяется по формуле

$$k_{ro} = k_{rc}\left[\left(\frac{\tilde{k}_{row}}{k_{rc}} + k_{rw}\right)\left(\frac{\tilde{k}_{rog}}{k_{rc}} + k_{rg}\right) - \left(k_{rw} + k_{rg}\right)\right],$$

где $k_{rc} = \tilde{k}_{rog}\left(S_g = 0\right)$.

Для системы уравнений (1)-(4) задаются начальные и граничные условия

$$p\big|_{t=0} = p^0,\ S_w\big|_{t=0} = S_w^0,\ S_o\big|_{t=0} = S_o^0, \tag{7}$$

$$p\big|_{\Gamma_1} = p_\Gamma,\quad \mathbf{U}_{\alpha n}\big|_{\Gamma_2} = 0,\quad S_w\big|_{\Gamma_{in}} = 1, \tag{8}$$

где $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ - граница пласта Ω, Γ_{in} - часть границы пласта, через которую жидкость поступает в пласт, $\mathbf{U}_{\alpha n}$ - нормальная составляющая вектора скорости фильтрации фазы α.

Система уравнений (1) - (4) с начальными и граничными условиями (7) - (8) решается численно следующим образом [2]. На первом этапе проводится аппроксимация по времени по неявной схеме. Система уравнений (1) - (3) принимает вид

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\frac{mS_w}{B_w}\right)^{n+1} - \left(\frac{mS_w}{B_w}\right)^{n}\right] = \nabla\cdot\left(T_w^{n+1}\nabla p^{n+1}\right), \tag{9}$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\frac{mS_o}{B_o}\right)^{n+1} - \left(\frac{mS_o}{B_o}\right)^{n}\right] = \nabla\cdot\left(T_o^{n+1}\nabla p^{n+1}\right), \tag{10}$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\left(m\left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_s S_o}{B_o}\right)\right)^{n+1} - \left(m\left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_s S_o}{B_o}\right)\right)^{n}\right] =$$

$$= \nabla\cdot\left(T_g^{n+1}\nabla p^{n+1} + R_s^{n+1} T_o^{n+1}\nabla p^{n+1}\right), \tag{11}$$

где $\Delta t = t^{n+1} - t^{n}$, n - номер временного слоя.

На втором этапе на каждом временном слое система (9) - (11) линеаризуется методом Ньютона-Рафсона. На каждой итерации метода Ньютона-Рафсона решается следующая система уравнений

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\frac{mS_w}{B_w}\right)^{n+1,l} + \delta\left(\frac{mS_w}{B_w}\right) - \left(\frac{mS_w}{B_w}\right)^{n}\right] = \nabla\cdot\left(T_w^{n+1,l+1}\nabla p^{n+1,l+1}\right), \qquad (12)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\frac{mS_o}{B_o}\right)^{n+1,l} + \delta\left(\frac{mS_o}{B_o}\right) - \left(\frac{mS_o}{B_o}\right)^{n}\right] = \nabla\cdot\left(T_o^{n+1,l+1}\nabla p^{n+1,l+1}\right), \qquad (13)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left\{\left[m\left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_s S_o}{B_o}\right)\right]^{n+1,l} + \delta\left[m\left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_s S_o}{B_o}\right)\right] - \left[m\left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_s S_o}{B_o}\right)\right]^{n}\right\} =$$

$$= \nabla\cdot\left(T_g^{n+1,l+1}\nabla p^{n+1,l+1} + R_s^{n+1,l+1} T_o^{n+1,l+1}\nabla p^{n+1,l+1}\right), \qquad (14)$$

где $p^{n+1,l+1} = p^{n+1,l} + \delta p,\ S_i^{n+1,l+1} = S_i^{n+1,l} + \delta S_i$, n - номер временного слоя, l - номер итерации метода Ньютона-Рафсона.

На третьем этапе для упрощения системы (12) - (14) применяется метод последовательного решения. Сначала определяется приращение давления из уравнения

$$\left(c_{gp} - \frac{c_{gS_w} c_{wp}}{c_{wS_w}} - \frac{c_{gS_o} c_{op}}{c_{oS_o}}\right)\delta p = F_g(\delta p) - \frac{c_{gS_w}}{c_{wS_w}} F_w(\delta p) - \frac{c_{gS_o}}{c_{oS_o}} F_o(\delta p). \qquad (15)$$

Затем, с учётом вычисленного приращения давления, определяется водонасыщенность

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\frac{mS_w}{B_w}\right)^{l} - \left(\frac{mS_w}{B_w}\right)^{n} + c_{wp}\delta p + c_{wS_w}\delta S_w\right] =$$

$$= \nabla\cdot\left(\left(T_w^{l} + E_{wp}\delta p + E_{wS_w}\delta S_w\right)\nabla p^{l}\right) + \nabla\cdot\left(T_w^{l}\nabla(\delta p)\right). \qquad (16)$$

Далее при известных приращении давления и водонасыщенности вычисляется нефтенасыщенность

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\frac{mS_o}{B_o}\right)^l - \left(\frac{mS_o}{B_o}\right)^n + c_{op}\delta p + c_{oS_o}\delta S_o\right] =$$

$$= \nabla \cdot \left(\left(T_o^l + E_{op}\delta p + E_{oS_w}\delta S_w + E_{oS_o}\delta S_o\right)\nabla p^l\right) + \nabla \cdot \left(T_o^l \nabla(\delta p)\right). \qquad (17)$$

Для аппроксимации каждого уравнения (15) - (17) по пространственным переменным используется метод контрольных объёмов. В качестве контрольных объёмов выбраны цилиндрические круговые сегменты. Полученные системы алгебраических уравнений решаются методом ORTHOMIN с ILU-предобуславливателем [2, 3].

Задача идентификации коэффициента абсолютной проницаемости.

Для решения системы уравнений (1) - (4) должны быть известны значения коэффициента абсолютной проницаемости пласта. В данной работе эти значения определяются в процессе решения обратной коэффициентной задачи [4]. Для её решения на скважине должны быть известны значения давления и дебита. Значения давления используются при решении прямой задачи (система уравнений (1) - (4)), а значения дебита для решения обратной задачи. Одним из методов решения обратных коэффициентных задач является сведение их к задачам минимизации квадратичных функций (функция невязки). Используя значения замеров дебита на скважине, функцию невязки можно записать в виде

$$J(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\left(q_j - q_j^*\right)^2, \qquad (18)$$

где $\mathbf{X}^T = (x_1,\ldots,x_N)$, x_i - значения натуральных логарифмов коэффициента абсолютной проницаемости, q_j, q_j^* - значения дебита на скважине в различные моменты времени j, полученные в результате решения уравнений (1) - (4) и заданные, M – число замеров на скважине, N - число неизвестных значений коэффициента абсолютной проницаемости.

Минимизация функции невязки (18) проводится методом Левенберга-Марквардта [4-6]. Новые значения параметров на каждой итерации определяются по формуле

$$\mathbf{X}^n = \mathbf{X}^{n-1} - \left(\mathbf{H} + \mu_n \mathbf{E}\right)^{-1} \mathbf{g},$$

где $\mathbf{E}$ - единичная матрица, $\mathbf{H} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ - приближённая матрица вторых производных, $\mathbf{A} = \left\{ \dfrac{\partial q_j}{\partial x_l} \right\}$ - матрица чувствительности, $\mathbf{g}$ - градиент функции невязки, μ_n - параметр Марквардта, n - номер итерации. В случае уменьшения функции невязки на текущей итерации $J\left(\mathbf{X}^n\right) < J\left(\mathbf{X}^{n-1}\right)$ параметр Марквардта уменьшается в два раза и осуществляется переход на новую итерацию. В случае нарушения условия убывания параметр Марквардта увеличивается в два раза до тех пор, пока это условие не выполнится. Начальное значение параметра Марквардта выбирается на порядок больше максимального сингулярного числа матрицы $\mathbf{H}$ [7]. Для вычисления элементов матрицы чувствительности используется метод конечно-разностных соотношений.

Модельная задача.

Цилиндрический пласт Ω (радиус пласта 100 м, мощность 9 м) состоит из трёх слоев одинаковой мощности (3 м). Каждый слой пласта характеризуется одним значением коэффициента абсолютной проницаемости: $k_1 = 0{,}5$ мкм^2, $k_2 = 0{,}1$ мкм^2, $k_3 = 1{,}0$ мкм^2. В центре пласта расположена несовершенная скважина (радиус скважины 0,1 м). Скважина вскрывает третий слой пласта. Через боковую поверхность первого слоя в пласт поступает вода (вертикальный разрез пласта показан рис. 1). На скважине задано давление 5 МПа, на боковой поверхности 1-го слоя давление 10 МПа. Боковая поверхность 2-го и 3-го слоя, кровля и подошва пласта непроницаемые. В формулах (5), (6) для функций относительных фазовых проницаемостей: $A = 0{,}2$, $S_{wc} = 0{,}4$, $S_{w\max} = 0{,}8$, $S_{gr} = 0{,}02$, $nw = now = 2$, $ng = 0{,}83$, $nog = 7{,}5$. Начальные насыщенности $S_w^0 = 0{,}4$, $S_o^0 = 0{,}6$. Коэффициент растворимости газа в нефти R_s меняется линейно, при давлении $5\,\text{МПа}$ $R_s = 20$, при давлении насыщения равном $10\,\text{МПа}$ $R_s = 20$. Коэффициенты динамических вязкостей нефти, воды и газа равны $\mu_o = 10\,\text{мПа}\cdot\text{с}$, $\mu_w = 1\,\text{мПа}\cdot\text{с}$, $\mu_g = 0{,}01\,\text{мПа}\cdot\text{с}$. Пористость пласта считается постоянной: $m = 0{,}3$. Начальное давление $p^0 = 10\,\text{МПа}$.

Модельная задача идентификации коэффициентов абсолютной проницаемости слоёв пласта строится следующим образом. Сначала с заданными значениями коэффициентов абсолютной проницаемости слоёв решается система уравнений (1)-(4) и определяются значения дебита на скважине в различные моменты времени: q_j^*, $j = 1,\ldots,M$. После этого считается, что коэффициенты абсолютной проницаемости слоёв пласта неизвестны, и требуется их определить по известным значениям дебита q_j^* в процессе минимизации функции невязки (18). Особенность модельных задач состоит в том, что для них всегда известно точное решение. Это позволяет проводить тестирование методов решения и оценивать достаточность исходных данных для получения точного решения.

Идентификация коэффициентов абсолютной проницаемости слоёв пласта проводилась по замерам дебита, вычисленным через каждые сутки в интервале от 0 сут. до 5 сут. Начальные значения коэффициентов абсолютной проницаемости брались равными $k_1^0 = k_2^0 = k_3^0 = k^0$, и минимизация проводилась с различными начальными значениями k^0. Для исследования устойчивости решения в замеры дебита вносились генерируемые случайным образом погрешности ε_i. Остановка процесса минимизации функции невязки проводилась по выполнению одного из двух критериев: достижение заданной точности по замерам дебита $\max_{j=1,M}\left|q_j - q_j^*\right| < 10^{-8}$ м^3/с; медленная сходимость процесса минимизации $J^n - J^{n+1} < 0{,}01 J^n$ в течение 10 итераций.

Далее приведены истинные и вычисленные значения коэффициента абсолютной проницаемости и число выполненных итераций при решении модельной задачи при различных начальных значения идентифицируемых параметров (табл. 1) и при различных погрешностях в замерах дебита (табл. 2).

Таблица 1

Результаты идентификации абсолютной проницаемости при различных начальных значениях.

Истинные, мкм^2	Вычисленные, мкм^2		
	k^0=1	k^0=0,1	k^0=0,01
k^1=0,5	0,500002	0,500012	0,499995
k^2=0,1	0,100022	0,100126	0,0999323
k^3=1,0	0,999827	0,998983	1,00049
Nit	30	21	14

Nit – число итераций.

Таблица 2

Результаты идентификации абсолютной проницаемости при погрешностях в замерах дебита.

Истинные, мкм^2	Вычисленные, мкм^2		
	$\lvert\varepsilon_i\rvert < 1\times10^{-5}$	$\lvert\varepsilon_i\rvert < 1\times10^{-6}$	$\lvert\varepsilon_i\rvert < 1\times10^{-7}$
k^1=0,5	0,414768	0,493613	0,499383
k^2=0,1	0,182896	0,103036	0,100315
k^3=1,0	4,93551	1,09067	1,00813
Nit	50	26	32

Nit – число итераций; ε_i – погрешности в замерах дебита, м^3/с.

Заключение.

Решена модельная задача идентификации значений абсолютной проницаемости слоистого трёхмерного пласта в условиях трёхфазного течения жидкостей. Неизвестные значения коэффициента абсолютной проницаемости слоёв определялись в процессе минимизации функции невязки. Идентификация проводилась по известным замерам дебита на скважине. Результаты решения модельной задачи при различных начальных значениях и различных погрешностях в замерах дебита показывают, что итоговые значения идентифицируемых параметров практически совпадают с истинными значениями.

Список литературы

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. - М.: Недра, 1982. - 407 с.
2. Chen Z, Huan G, Ma Y. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media // Computational Science and Engineering Series, vol. 2. SIAM: Philadelphia, PA, 2006. - 549 p.
3. Vinsome P.K.W. ORTHOMIN, an iterative method for solving sparse sets of simultaneous linear equations // Proceedings of the Fourth Symposium on Reservoir Simulations, Society of Petroleum Engineers of AIME, 1976. - 149–157 p.
4. Sun N.-Z. Inverse Problems in Groundwater Modeling. - Kluwer Acad., Norwell, Mass., 1994. - 337 p.
5. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. - М.: Мир, 1988. – 440 с.
6. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие. – 2-е изд.,- М.: Высш.шк., 2005. – 544 с.
7. Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. Матричные вычисления. - М.: Мир, 1999. – 548 с.

Сведения об авторах

Елесин Андрей Викторович, кандидат физико-математических наук, и.о. с.н.с., заведующий, лаборатория математического моделирования гидрогеологических процессов, Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г.Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация
E-mail: elesin@imm.knc.ru

Кадырова Альфия Шамилевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, лаборатория математического моделирования гидрогеологических процессов, Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г.Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация
E-mail: kadyirova_ash@imm.knc.ru

Никифоров Анатолий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, и.о. г.н.с., заведующий, лаборатория математического моделирования процессов фильтрации, Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г.Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация
E-mail: nikiforov@imm.knc.ru

Authors

A.V. Elesin, PhD, Head of Groundwater Math Simulation Laboratory, Institute of Mechanics and Machinery, Kazan Research Center of the RAS, Kazan, Republic of Tatarstan, Russian Federation
E-mail: elesin@imm.knc.ru

A.Sh. Kadyrova, PhD, Senior researcher, Groundwater Math Simulation Laboratory, Institute of Mechanics and Machinery, Kazan Research Center of the RAS, Kazan, Republic of Tatarstan, Russian Federation
E-mail: kadyirova_ash@imm.knc.ru

A.I. Nikiforov, Dr.Sc, Professor, Head of Fluid Flow Math Simulation Laboratory, Institute of Mechanics and Machinery, Kazan Research Center of the RAS, Kazan, Republic of Tatarstan, Russian Federation
E-mail: nikiforov@imm.knc.ru

Елесин Андрей Викторович
420111, Российская Федерация, Республика Татарстан,
г. Казань, ул. Лобачевского, 2/31
тел.: +7(843)2927490
E-mail: elesin@imm.knc.ru